

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

### CLASA A IX-A

#### BAREM DE NOTARE

1.

- a) Inegalitatea se scrie echivalent:  $a^2xy + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2xy \geq a^2xy + 2abxy + b^2xy$  sau  $(ay - bx)^2 \geq 0$ , relație care este adevărată. Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ . (2p)

- b) Aplicând relația de la punctul a) obținem

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (1p)$$

- c) Presupunem că numerele  $x, y, z$  au toate același semn. Dacă sunt pozitive atunci avem

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq \frac{(1+2+3)^2}{x+y+z} = \frac{36}{x+y+z} > \frac{35}{x+y+z}, \text{ contradicție cu ipoteza.}$$

(3p)

Dacă sunt negative, înmulțim relația cu  $-1$  și reducem problema la situația în care toate sunt pozitive. (1p)

2. Căutăm un număr real pozitiv  $a$  astfel încât  $\frac{x}{x^2+2x+2} \leq \frac{1}{a}, \forall x \in R$ . Relația se scrie echivalent  $x^2 + (2-a)x + 2 \geq 0, \forall x \in R$ , aceasta fiind adevărată dacă membrul stâng se poate restrânge într-un pătrat, caz în care avem  $2-a = -2\sqrt{2}$  deci  $a = 2 + 2\sqrt{2}$ . Atunci relația

$E(x) \leq \frac{1}{2+2\sqrt{2}}$  se scrie echivalent  $(x - \sqrt{2})^2 \geq 0$ , cu egalitate pentru  $x = \sqrt{2}$ , deci maximul lui

$$E(x) \text{ este } \frac{1}{2+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}. \quad (4p)$$

În mod similar căutăm  $a$  real negativ astfel încât  $\frac{x}{x^2+2x+2} \geq \frac{1}{a}, \forall x \in R$ , sau echivalent

$x^2 + (2-a)x + 2 \geq 0, \forall x \in R$ . Obținem  $a = 2 - 2\sqrt{2}$ , iar minimul lui  $E(x)$  va fi  $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ , pentru  $x = -\sqrt{2}$ . (3p)

3. Dacă  $n \geq 3$  avem  $n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 5 < (n+1)^2$ , de unde obținem

$$n < \sqrt{n^2 + 1} < \sqrt{n^2 + 5} < n+1, \text{ deci } \lceil \sqrt{n^2 + 1} \rceil = \lceil \sqrt{n^2 + 5} \rceil = n. \quad (4p)$$

Dacă  $n = 0$ , avem  $\lceil \sqrt{n^2 + 9} \rceil = \lceil \sqrt{n^2 + 13} \rceil = 3. \quad (1p)$

Dacă  $n = 1$ , avem  $\lceil \sqrt{n^2 + 9} \rceil = \lceil \sqrt{n^2 + 13} \rceil = 3$ . ( 1p )

Dacă  $n = 2$ , avem  $\lceil \sqrt{n^2 + 13} \rceil = \lceil \sqrt{n^2 + 17} \rceil = 4$ . ( 1p )

Deci  $n$  poate avea orice valoare naturală.

4. Notăm  $\frac{AP}{PC} = k$ , și obținem  $\overrightarrow{DP} = \frac{\overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{DC}}{1+k}$ . ( 2p )

De asemenea avem

$$\overrightarrow{DN} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}}{2} = \frac{\overrightarrow{DA} + \frac{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{2}}{2} = \frac{2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{4} = \frac{3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC}}{4} \quad (2p)$$

Cum punctele  $D, P, N$  sunt coliniare, deduce că există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât să avem  $\overrightarrow{DP} = \alpha \overrightarrow{DN}$ ,  
adică  $\frac{\overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{DC}}{1+k} = \frac{3\alpha \overrightarrow{DA} + 2\alpha \overrightarrow{DC}}{4}$ . ( 2p )

Cum vectorii  $\overrightarrow{DA}$  și  $\overrightarrow{DC}$  sunt necoliniari, deducem că  $\frac{1}{1+k} = \frac{3\alpha}{4}$  și  $\frac{k}{1+k} = \frac{2\alpha}{4}$ , relații din care  
obținem  $k = \frac{2}{3} = \frac{AP}{PC}$ . ( 1p )